Eine Untersuchung

der

Parallaxe des Zentralsternes des Ringnebels

in der Leier.

Messier 57. — Dreyer's General Catalogue 6720.

Der philosophischen Facultät

der

K. Ludwig-Maximilians-Universität in München

als

Inaugural-Dissertation

vorgelegt am 8. Februar 1902

von

Burt L. Newkirk

aus Minneapolis.

München 1902.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Eine Untersuchung

der

Parallaxe des Zentralsternes des Ringnebels

in der Leier.

Messier 57. — Dreyer's General Catalogue 6720.

Der philosophischen Facultät

der

K. Ludwig-Maximilians-Universität in München

als

Inaugural-Dissertation

vorgelegt am 8. Februar 1902

von

Burt L. Newkirk

aus Minneapolis.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

München 1902.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0140

Folgende Untersuchung der Parallaxe des Centralsternes des Ringnebels in der Leier beruht auf der Ausmessung von 15 photographischen Aufnahmen mit dem $10^1/_2$ zölligen Refractor der Sternwarte der Universität von Minnesota (Vereinigten Staaten von Amerika). Einzelheiten über die Aufnahmen befinden sich in Tafel I.

Das Bild des Zentralsternes ist auf allen Platten leicht sichtbar und ist nicht von dem irgend eines anderen schwachen Sterns zu unterscheiden.

Es wurden 16 Vergleichsterne, in 8 Paaren verteilt, benützt. Die Positionen dieser Sterne findet man, nebst ihrer Helligkeit, mit hinreichender Genauigkeit für Identificationszwecke in Tafel II. Die Helligkeitsschätzungen sind mir von Prof. Leavenworth (Prof. of Astronomy and Director of the Observatory at the University of Minnesota) freundlicher Weise mitgeteilt worden. Es ist zu bemerken, dass die beiden Sterne jedes Paares in Beziehung auf Distanz vom Nebelstern, Positionswinkel und Helligkeit symmetrisch gewählt worden sind.

Alle Platten ausser No. 121 und No. 122 wurden von mir mit dem Repsold'schen Messapparat der Sternwarte der Universität von Minnesota ausgemessen. (Betreffs Beschreibung eines solchen Instrumentes siehe Scheiner's „Photographie der Gestirne". Leipzig 1897 p. 148.) Die Platten 121 und 122 wurden von Herrn Libby, damals Assistent an der Sternwarte der Universität von Minnesota, ausgemessen und diese Messungen wurden mir von Prof. Leavenworth mitgeteilt.

Die Methode der Ausmessung war folgende: Die Platte wurde so in den Apparat eingelegt, dass der Nebelstern dem Rotationszentrum des Plattenträgers möglichst nahe stand; so dass bei einer

Umdrehung der Platte der Nebelstern einen möglichst kleinen Kreis beschrieb. Die Platte wurde dann gedreht, bis die Verbindungslinie Stern 1 — Nebelstern parallel der Verschiebungsrichtung des Mikrometerträgers war. Diese Distanz wurde dann in der gewöhnlichen Weise gemessen, wozu vier Einstellungen auf jeden Stern, und für jeden Stern je zwei Einstellungen auf zwei Scalalinien gemacht wurden. Der Plattenträger wurde dann ein wenig gedreht, bis die Linie Stern 2 — Nebelstern der Verschiebungsrichtung des Mikrometerträgers parallel war und diese Distanz in derselben Weise gemessen. Die Platte wurde dann sofort um 180° gedreht und dieselben Distanzen wurden in der umgekehrten Ordnung wieder gemessen. Diese Messungen galten als eine vollkommene Beobachtung eines Paares und wurden, mit sehr wenigen Ausnahmen, ohne Unterbrechung gemacht. Jede Platte, ausser No. 121 und No. 122 wurde in der beschriebenen Weise zweimal gemessen (diese beiden nur einmal), also jede einzelne Strecke im ganzen viermal.

Legt man die Platte jedesmal so in den Apparat, dass der Nebelstern dem Drehzentrum möglichst nahe liegt, so erreicht man, dass jede Strecke (z. B. Stern 1 — Nebelstern) auf allen Platten ungefähr mit demselben Teil der Scala gemessen wird; und da die Teilungsfehler in ziemlich regelmässiger Weise von den beiden Enden der Scala zu einem Maximum in der Mitte derselben ansteigen, so wird die Genauigkeit der Parallaxebestimmung von der Bestimmung der Teilungsfehler der Scala weniger abhängig gemacht, während die Messung in den zwei Positionen (0° und 180°) den constanten persönlichen Fehler der Einstellung eliminiert. Ferner wurde bei jeder Platte die Einstellung auf den Stern so gemacht, dass die Mikrometerablesung bei der ersten Messung 11.0 +, bei der zweiten Messung dagegen 11.5 + war, wodurch der Fehler wegen der Excentrizität des Mikrometerkopfes im Mittel der zwei Messungen nahezu eliminiert erscheint. Bei den einzelnen Einstellungen wurde der Mikrometer bis auf zweitausendstel eines Scalateiles abgelesen und bei der Reduction wurde noch eine Decimalstelle beibehalten. Der Bogenwert eines Scalateils ist etwa 59″.6. Also entspricht einer Einheit der letzten Decimalstelle der Rechnung, d. h. der vierten, 0″.006. Die Positionswinkel wurden bloss auf einer Platte gemessen, um

die nötigen Data für die Beschreibung der Vergleichsterne und die Berechnung der Refraction zu gewinnen. Die Orientierung wurde mit Hilfe einer Spur erreicht. Während der Messung wurde der Temperaturzustand des Zimmers möglichst constant gehalten und nach einem raschen Temperaturwechsel keine Messungen gemacht.

Zuerst wurden die Correctionen wegen der Fehler des Messapparats angebracht. Letztere sind Teilungsfehler der Scala, Gang der Schraube und Excentrizität des Mikrometerkopfes. Die erstgenanten Correctionen wurden aus einer Tafel entnommen, die, nach einer früheren besonderen Untersuchung der Scala, von Prof. Leavenworth hergestellt worden war.

Die Correction wegen des Ganges der Schraube wurde für jeden Beobachtungstag bestimmt. Es wurde bei der Beobachtung jedes Sternes, auf die beiden Scalalinien, zwischen welchen der Stern sich befand, eingestellt und aus 20 solchen Beobachtungen der Gang der Schraube, mit Berücksichtigung der Teilungsfehler der beiden Scalalinien, für jeden Tag bestimmt.

Die Excentrizität des Mikrometerkopfes ist beträchtlich und verlangt eine Correction, die bis auf $0^{s}.09$ steigt. Diese Exzentrizität wurde, nebst einer Tafel zur bequemen Bestimmung der deshalb nötigen Correctionen, von Prof. Leavenworth, aus einer Reihe besonderer Beobachtungen berechnet.

Ein Punkt, in dem die Beobachtungs- und Reductions-Methode von der gewöhnlichen ein wenig abweicht, verdient vielleicht erwähnt zu werden. Nach der gewöhnlichen Methode, zur Messung einer Distanz zwischen zwei Punkten a und b, dreht man die Platte erst so, dass die Linie $a - b$ parallel mit der Verschiebungsrichtung des Mikrometerträgers wird, stellt die Fäden auf den Punkt a ein, und liest dann das Mikrometer ab, hierauf wendet man das Mikroscop auf die Scala, stellt auf die nächst niedrige Scalalinie ein und liest abermals das Mikrometer ab. Die Position des Punktes a auf der Scala ist dann durch die auf der Scala abgelesene ganze Zahl und jenen Bruchteil, welcher der Differenz der Mikrometerablesungen entspricht, gegeben. Die Position des Punktes b auf der Scala ist in derselben Weise zu bestimmen. Die Correction wegen des Teilungsfehlers der Scala ist dann jedesmal diejenige, welche dem nächst niedrigeren Teilstrich

entspricht, während die Correction wegen des Ganges der Schraube für die Differenz zwischen den beiden Ablesungen zu berechnen ist. Bei diesen Messungen wurden Einstellungen auf beide Scalalinien, zwischen welchen sich die Sternposition befindet, und zwar auf jede Linie zwei, gemacht. Für die „Mikrometer-Ablesung der Scalalinie“ wurde die Revolutionszahl, welche zu dem niedrigeren Teilstrich gehört, für den Bruchteil aber das arithmetische Mittel der Bruchteile aller vier Ablesungen genommen. Die Correction wegen Teilungsfehler ist also das arithmetische Mittel derjenigen, welche für die obere und die untere Scalalinie gelten. Die Correction wegen des Schraubenganges ist von der Mittelstelle aus positiv oder negativ zu nehmen und kann nicht mehr als die Hälfte des Ganges für einen Millimeter betragen. Die so von den Fehlern des Messapparates befreiten Distanzen findet man in Tafel III.

Sodann wurden Correctionen wegen Tangentialdistorsion, Refraction und Aberration eingeführt. Die erste verschwindet für alle Sterne ausser No. 1 und No. 2. Die Refraction wurde nach der gewöhnlichen photographischen Differentialrefractionsformel:

$$\sigma - s = \frac{\ell 6}{65} k \left[\tan^2 \zeta \cos^2 (p - q) + 1\right]$$

berechnet, welche für diese kleinen Distanzen und bei so geringen Zenitdistanzen ausreicht. Die Refraction wurde für vier verschiedene Positionswinkel auf fünf Platten (40, 42, 100, 114, 119) berechnet. Allein für Platte 40 wurde der Wert $\log k = 6.444$ (welche für Platte 42 gilt) und für Platte 119 der Wert $\log k = 6.451$ (welche für Platte 114 gilt) gebraucht. Hieraus bildete man eine Tafel aus der durch Interpolation für die verschiedenen Zenitdistanzen und durch Multiplication mit einem Faktor $\frac{k'}{k}$, die Refractionscorrectionen für alle Distanzen auf allen Platten zu berechnen sind (siehe Tafel IV).

Die Verbesserung wegen Aberration wurde nach der Formel: (Scheiner's „Photographie der Gestirne“ p. 186)

$$\Delta s = - s \sin 1'' \,(a A + b B) \text{ wo: } A = - 20''.4451 \cos \omega \cos \odot$$
$$B = - 20.4451 \sin \odot$$
$$a = - (\sin \alpha \cos \delta + \sin \delta \tan \varepsilon)$$
$$b = \cos \alpha \cos \delta$$

bestimmt. Die Grösse $\frac{\Delta s}{s}$ wurde für jede Platte berechnet (siehe Tafel V). Die Distanzen nach Einführung dieser Correctionen findet man in Tafel VI.

Es bleibt weiter, um das Material homogen zu machen — d. h. um alle Platten auf eine massgebende zu reduzieren — die Verschiedenheit des Scalawertes zu berücksichtigen, sowie die Neigung der Plattennormale gegen die optische Achse des Fernrohrs. Eine strenge Methode wäre hierzu folgende:

Construieren wir ein Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Linsenzentrum und der z Achse in der optischen Achse des Fernrohrs. Sei die Ebene I senkrecht zu der z Achse in einer Entfernung C vom Nullpunkt, die Ebene II schief gegen die z Achse und in der Entfernung C' vom Nullpunkt. Sei ferner $x\,y\,z$ ein Punkt auf der Ebene I und $x'\,y'\,z'$ der Schnittpunkt einer durch den Anfangspunkt und den Punkt $x\,y\,z$ gelegten Geraden mit der Ebene II. Bezeichnen wir mit Δ und Δ' die Entfernungen, in der Ebene I bezw. II gemessen, der Punkte $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ von der z Achse. Die Aufgabe ist, die Relation zwischen Δ und Δ' zu bestimmen.

Es ist:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

und da $z = C$

$$x = C\,\frac{x'}{z'} \qquad y = C\,\frac{y'}{z'} \qquad z = C\,\frac{z'}{z'}. \tag{1}$$

Sei die Gleichung der Ebene II:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \delta'. \tag{2}$$

Legen wir ein zweites Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Schnittpunkte der z Achse mit der Ebene II. Sei die ξ Achse die Schnittlinie der $x\,z$ Ebene mit der Ebene II und die η Achse sei in der Ebene II senkrecht zu ihr. Dann ist:

$$\begin{aligned} x &= \xi\cos(\xi\,x) + \eta\cos(\eta\,x) + \zeta\cos(\zeta\,x) \\ y &= \xi\cos(\xi\,y) + \eta\cos(\eta\,y) + \zeta\cos(\zeta\,y) \\ z &= C' + \xi\cos(\xi\,z) + \eta\cos(\eta\,z) + \zeta\cos(\zeta\,z). \end{aligned}$$

In Gleichung (2) setze man $y = 0$, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der $x\,z$ Ebene mit Ebene II:

$$x\cos\alpha + z\cos\gamma = \delta'.$$

Die Gleichung dieser Linie ist aber auch:

$$x = \cot \mu \, (z - C')$$

oder

$$x \sin \mu - z \cos \mu = - C' \cos \mu, \tag{3}$$

wo μ den Winkel bezeichnet, welchen die genannte Linie mit der nach oben gerichteten x Achse bildet.

Es ist also:

$$\sin \mu = \quad M \cos \alpha$$
$$\cos \mu = - M \cos \gamma$$
$$\cos \mu = - M \frac{\delta'}{C'},$$

dabei:

$$\frac{\delta'}{C' \cos \gamma} = 1$$

$$M^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) = M^2 \sin^2 \beta = 1 \qquad M = - \frac{1}{\sin \beta}$$

und also:

$$\sin \mu = - \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \qquad \cos \mu = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.$$

Wir denken uns nämlich die Linie $(\alpha \beta \gamma)$ in dem ersten Octant gelegen, so dass $\cos \gamma$ positiv ist; die Linie (3) geht nach oben — d. h. $\cos \mu$ muss positiv sein.

Die Coordinatentransformation liefert:

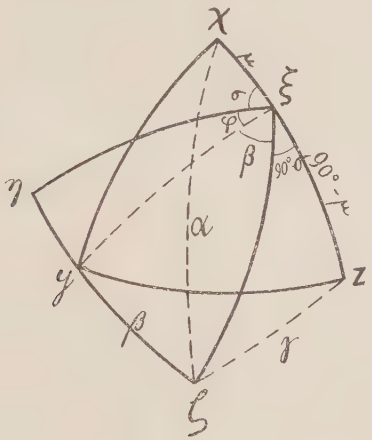
$$\cos (\xi x) = \cos \mu = \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}$$
$$\cos (\xi y) = 0$$
$$\cos (\xi z) = \sin \mu = - \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$$
$$\cos (\eta x) = \sin \mu \cos \sigma = - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \beta}$$
$$\cos (\eta y) = \sin \beta$$
$$\cos (\eta z) = - \cos \mu \cos \alpha = - \frac{\cos \gamma \cos \beta}{\sin \beta}$$
$$\cos (\zeta x) = \cos \alpha$$
$$\cos (\zeta y) = \cos \beta$$
$$\cos (\zeta z) = \cos \gamma.$$

Nämlich $\cos\gamma = \cos\mu\cos\sigma$ $\quad \varphi + \sigma = 90^0$

$\beta + \varphi = 90^0$ d. h. $\beta = \sigma$.

Also: $$z' = C' - \xi' \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \eta' \frac{\cos\gamma\cos\beta}{\sin\beta},$$

wo ξ' und η' die Coordinaten des Punktes $x'\,y'\,z'$ bezogen auf das zweite Coordinatensystem bezeichnen.



Es ist:

$$\Delta^2 = x^2 + y^2$$
$$\Delta'^2 = x'^2 + y'^2 + (z' - C')^2$$

und nach (1)

$$\Delta^2 = C^2 \frac{x'^2 + y'^2}{z'^2} = \frac{C^2}{z'^2}\{\Delta'^2 - (z' - C')^2\}$$

setzen wir nun:

$$f = \xi' \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \eta' \frac{\cos\gamma\cos\beta}{\sin\beta}$$

so ist:

$$\Delta^2 = \frac{C^2(\Delta'^2 - f^2)}{(C' - f)^2}.$$

Um diese Relation in eine für die Ausrechnung passende Form zu bringen, setzen wir:

$$\cos\alpha = \sin i\cos\psi$$
$$\cos\beta = \sin i\sin\psi$$
$$\xi' = \Delta'\cos p$$
$$\eta' = \Delta'\sin p,$$

wobei i den Winkel, welchen die Normale der Ebene II (d. h. die gemessene Platte) mit der z Achse (die optische Achse des Fernrohrs) bildet ($= \gamma$) ist und p den Positionswinkel der gemessenen Linie Δ' bezeichnet. Es ist dabei festgesetzt, dass die $x\,z$ Ebene, deren Schnittlinien mit den Ebenen I und II bis jetzt willkürlich waren, diese Ebenen im Meridian schneidet.

Dann ist:

$$f = \frac{\Delta'}{\sin\beta}\,[\sin i\cos\psi\cos p + \sin i\cos i\sin\psi\sin p]$$

$$\frac{1}{\sin\beta} = (1-\sin^2 i\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 i\sin^2\psi + \ldots.$$

und wenn $\frac{i^2}{2}$ gegen 1 und $\frac{i^3}{3!}$ gegen i vernachlässigt wird:

$$f = \Delta'\sin i\cos(p-\psi)$$

$$\Delta^2 = \frac{C^2\Delta'^2}{C'^2}\{1 - \frac{\Delta'}{C'}\sin i\cos(p-\psi)\}^{-2}$$

$$\Delta = \frac{C}{C'}\Delta'\{1 + \frac{\Delta'}{C'}\sin i\cos(p-\psi)\ldots.\} \qquad (4)$$

oder

$$\Delta = \Delta' + \frac{C-C'}{C'}\Delta' + \frac{C}{C'^2}\Delta'^2\sin i\cos(p-\psi).$$

Hier sind Δ' und p gemessen, C ist willkürlich anzunehmen und Δ, C', i und ψ sind unbekannt. Man hat also die Bedingungsgleichungen von der Form:

$$x + \Delta' y + (\Delta'^2\cos p)\,z + (\Delta'^2\sin p)\,w + a\,\pi + t\,\varepsilon + \Delta' = 0,$$

wo

$x = -\Delta$ $\qquad$ $w = \frac{C}{C'^2}\sin i\sin\psi$

$y = \frac{C-C'}{C'}$ $\qquad$ $\pi =$ die Parallaxe

$z = \frac{C}{C'^2}\sin i\cos\psi$ $\qquad$ $\varepsilon =$ Aenderung der Distanz wegen Eigenbewegung.

Jede gemessene Distanz liefert eine solche Gleichung und es wäre möglich, diese sechs Constanten für jede Platte aus den

16 gemessenen Distanzen zu bestimmen. Die so gefundenen Verbesserungen erlauben, alle Platten auf eine fingierte zu reduzieren, die senkrecht zu der optischen Achse in der willkürlich genommenen Distanz C steht.

Diese Methode wurde ihrer Umständlichkeit wegen nicht angewandt, sondern eine andere, die viel einfacher ist und hinreichende Genauigkeit für unseren Zweck besitzt.[1]) Wendet man Gleichung (4) auf die zwei Distanzen eines Paares auf einer Platte an und giebt man den entsprechenden Grössen den Index a bezw. b, so hat man, indem die Aenderungen der Distanzen durch Parallaxe und Eigenbewegung in Betracht gezogen werden:

$$\Delta_a = \frac{C}{C'} \Delta'_a \{1 + \frac{\Delta'_a}{C'} \sin i \cos (p_a - \psi)\} - \pi_a \Pi_a - \varepsilon_a t$$

$$\Delta_b = \frac{C}{C'} \Delta'_b \{1 + \frac{\Delta'_b}{C'} \sin i \cos (p_b - \psi)\} - \pi_b \Pi_b - \varepsilon_b t$$

wo Π_a und Π_b die relativen Parallaxen und ε_a und ε_b die Aenderungen der Distanzen wegen den relativen Eigenbewegungen bezeichnen.

Daraus folgt durch Addition:

$$\Delta_a + \Delta_b = \frac{C}{C'} \{(\Delta'_a + \Delta'_b) + A\} - (\pi_a \Pi_a + \pi_b \Pi_b) - (\varepsilon_a + \varepsilon_b) t \quad (5)$$

und durch Subtraction:

$$\Delta_a - \Delta_b = \frac{C}{C'} \{(\Delta'_a - \Delta'_b) + B\} - (\pi_a \Pi_a - \pi_b \Pi_b) - (\varepsilon_a - \varepsilon_b) t \quad (6)$$

wo $A = \sin i \{\Delta'_a \frac{\Delta'_a}{C'} \cos (p_a - \psi) + \Delta'_b \frac{\Delta'_b}{C'} \cos (p_b - \psi)\}$

und $B = \sin i \{\Delta'_a \frac{\Delta'_a}{C'} \cos (p_a - \psi) - \Delta'_b \frac{\Delta_b}{C'} \cos (p_b - \psi)\}$.

Aus (5) folgt: (bei Entwicklung nach Potenzen von $\frac{A}{\Delta'_a + \Delta'_b}$)

$$\frac{C}{C'} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{\Delta'_a + \Delta'_b} + \frac{\mathfrak{A}}{(\Delta'_a + \Delta'_b)} + \ldots .$$

wo $\mathfrak{A} = (\pi_a \Pi_a + \pi_b \Pi_b) + (\varepsilon_a + \varepsilon_b) t - A \frac{\Delta_a + \Delta_b}{\Delta'_a + \Delta'_b}$

[1]) Vergl. Parallaxes of μ and Θ Cassiopeiae by Harold Jacoby. Contributions from the Observatory of Columbia College, New-York, No. 5.

und wenn wir diesen Wert in (6) eintragen:

$$\Delta_a - \Delta_b = (\Delta'_a - \Delta'_b)\frac{\Delta_a + \Delta_b}{\Delta'_a + \Delta'_b} + B\frac{\Delta_a + \Delta_b}{\Delta'_a + \Delta'_b} - (\pi_a \Pi_a - \pi_b \Pi_b) - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)\, t + \mathfrak{A}\frac{\Delta'_a - \Delta'_b}{\Delta_a + \Delta_b} \tag{7}$$

setzen wir

$$\frac{\Delta_a + \Delta_b}{\Delta'_a + \Delta'_b} = 1 - \varkappa, \tag{8}$$

wonach, aus (7) mit hinreichender Genauigkeit (da $\varkappa$ sehr klein ist gegen 1)

$$\Delta_a - \Delta_b = (\Delta'_a - \Delta'_b)(1 - \varkappa) - (\pi_a \Pi_a - \pi_b \Pi_b) - (\varepsilon_a - \varepsilon_b)\, t + B + \mathfrak{A}\frac{\Delta'_a - \Delta'_b}{\Delta_a + \Delta_b}. \tag{9}$$

Wenn Δ_a und Δ_b nahezu einander gleich sind, was bei allen Paaren der Fall ist, so darf das letzte Glied vernachlässigt werden; besonders weil, der Symmetrie der Positionswinkel wegen, die Parallaxenglieder in $\mathfrak{A}$ mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen und das nämliche gilt auch für die Eigenbewegungglieder, wenn nur die zwei Vergleichsterne keine Eigenbewegung in ihren Verbindungslinien mit dem Nebel haben. B darf nur unter der Voraussetzung vernachlässigt werden, dass die gemessenen Distanzen nicht zu gross sind oder dass der Winkel i klein ist. Es ist nämlich:

$$B \leqq 2\,\Delta\frac{\Delta}{C}\sin i,$$

$$\text{wenn } \Delta = 25', \quad \text{dann ist: } \frac{\Delta}{C} = 0.0073$$

$$\text{und } B \leqq 21''.9 \sin i$$

$$\text{und für } i = 10' \; B \leqq 0''.06.$$

Die Distanzen bei Paar 1—2 sind etwa 25′. Ausser diesen sind die Distanzen alle unterhalb 14′. Ferner, da die Kassette wegen dieses Fehlers sorgfältig justiert wurde, ist es höchst unwahrscheinlich, dass i jemals mehr als 5′ betrug.

Gleichung (9) wird dann, bei Vernachlässigung dieser zwei Glieder:

$$\Delta_a - \Delta_b + (\varepsilon_a - \varepsilon_b)\, t + (\pi_a \Pi_a - \pi_b \Pi_b) - (\Delta'_a - \Delta'_b)(1 - \varkappa) = 0. \tag{10}$$

Die Grösse $\varkappa$ ist nach (8) für jedes Paar auf jeder Platte zu berechnen, wobei $(\Delta_a + \Delta_b)$ willkürlich anzunehmen ist. Es wurden für diese Werte die arithmetischen Mittel aus den respektiven Distanzen auf den ersten 13 Platten angenommen (die Data zur Ausrechnung der Platten 121 und 123 waren damals nicht vorhanden). Die Faktoren $\varkappa$ findet man in Tafel VII und die Grössen $(\Delta'_a - \Delta'_b)(1 - \varkappa)$, welche „die vollständigen verbesserten Distanzdifferenzen" genannt worden sind, in Tafel VIII.

Setzen wir nun:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_a - \Delta_b &= a + x \\ \varepsilon_a - \varepsilon_b &= y \text{ [1)]} \\ \pi_a \Pi_a - \pi_b \Pi_b &= (\pi_a - \pi_b)\,\Pi = \pi\,\Pi \\ (\Delta'_a - \Delta'_b)(1 - \varkappa) &= a + n \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Dann schreibt sich (10):

$$x + t\,y + \pi\,\Pi - n = 0.\text{ [1)]}$$

Die Messungen auf jeder Platte liefern eine solche Bedingungsgleichung, woraus die Werte von x, y und π für jedes Stern-Paar nach der Methode der kleinsten Quadrate zu berechnen sind.

Offenbar ist dieses Verfahren vollkommen gleichbedeutend mit der Vernachlässigung etwaiger Schiefe der Platte gegen die optische Achse, was, wie gesagt, nur unter Umständen gerechtfertigt ist.

Man sieht, dass die Aberration (indem sie nur eine Aenderung des Scalawertes bei Distanzmessungen bewirkt) mit der letzten Verbesserung hätte vereinigt werden können. Dasselbe gilt, mit hinreichender Strenge, auch für die Refraction, da die Positionswinkel der zwei Sterne eines Paares sich um ungefähr 180° von einander unterscheiden. Es schien aber wünschenswert, diese bekannten Verbesserungen separat einzuführen, um möglicherweise sehen zu können (aus Tafel VII), ob es irgend eine Fehlerquelle gab, welche vom Positionswinkel abhängige Fehler hervorbrachte. Diese Thatsache lieferte eine Controle der Einführung aller Verbesserungen, ausgenommen die Fehler des Messapparates. Man

---

[1)] Bei dem Bau der Bedingungsgleichungen wurde die Bezeichnungsweise so genommen, dass die Gleichungen lauten

$$x' + t\,y' + \pi'\,\Pi + n = 0$$

d. h. $x' = -x \quad y' = -y \quad \pi' = -\pi.$

behandle die Distanzen in Tafel III in derselben Weise, wie mit denen in Tafel VI verfahren wurde bei der Berechnung der vollständig verbesserten Distanzdifferenzen, wobei den willkürlichen Grössen $(\Delta_a + \Delta_b)$ die schon angenommenen Mittelwerte zuzuerteilen sind. Die so berechneten Distanzdifferenzen stimmen mit denen in Tafel VIII bis auf zwei in der letzten Decimalstelle überein.

Die Parallaxe-Coefficienten wurden nach folgender Formel berechnet:

$$(S_3 P_3 + S_4 P_4) - (S_3' P_3 + S_4' P_4) \quad \text{(Tafel IX)}$$

wobei die gestrichenen Buchstaben sich auf den Stern des Paares, welcher die kleinere Distanz vom Nebelstern hat, beziehen und:

$P_3 = -r \sin \odot$ $\quad g \sin G = \sin \delta \cos \alpha$ $\quad f \sin F = h \sin (H + \varepsilon)$

$P_4 = -r \cos \odot$ $\quad g \cos G = \sin \alpha$ $\quad f \cos F = -\cos \alpha \cos \varepsilon.$

$S_3 = f \sin (p + F)$ $\quad h \sin H = \sin \delta \sin \alpha$

$S_4 = g \sin (p + G)$ $\quad h \cos H = -\cos \delta$

α und δ sind die Rectascension und Declination des Nebelsternes und p ist der Positionswinkel des Vergleichsternes, auf den Nebelstern bezogen. Das absolute Glied ist die Differenz zwischen der vollständig verbesserten Distanzdifferenz (aus Tafel VIII) und einem angenommenen Wert derselben, welchen wir auf Seite 13 mit a bezeichnet haben — positiv, wenn der angenommene Wert der kleinere ist.

Die Gewichte der Platten wurden auf Grund von Bemerkungen über das Aussehen der Bilder festgesetzt. Bei der ersten Auflösung wurden den Platten 48 und 100 Gewichte gleich 0.5 gegeben. Die übrig bleibenden Fehler für diese Platten waren aber so gross, dass es wünschenswert schien, diese Platten entweder ganz auszuschliessen oder wenigstens ihnen sehr kleines Gewicht zu geben. Schon bei der Reduction wurde bemerkt, dass auf diesen Platten der Nebelstern in der Richtung der Rectascension verstellt ist. Es lässt sich vermuten, dass ungenaue Haltung des Fernrohrs an diesem Umstand Schuld war.

Da die absoluten Glieder der Parallaxegleichungen in Einheiten der zweiten Decimalstelle eines Scalateiles ausgedrückt sind, so sind die Resultate der Auflösungen mit 0.6 zu multipliciren,

um dieselbe in Bogensecunden auszudrücken (es ist 1 Scalateil gleich 59″.6). Für die Bedingungsgleichungen siehe Tafel X.

Die Resultate aus den einzelnen Auflösungen stelle ich hier zusammen.

Paar	Parallaxe	M. F.
1 – 2	+ 0″.068	± 0″.078
3 – 4	+ 0.130	± 0.098
5 – 6	+ 0.176	± 0.092
7 – 8	+ 0.094	± 0.108
9 – 10	+ 0.146	± 0.133
11 – 12	+ 0.064	± 0.124
13 – 14	+ 0.029	± 0.159
15 – 16	+ 0.059	± 0.186

Diese wurden bei Beilegung von Gewichten gleich den reciprocen Quadraten der gegebenen mittleren Fehler vereinigt. Das so gefundene Endresultat ist:

$$\Pi = + 0''.104 \pm 0''.017 \text{ M. F.}$$

Der mittlere Fehler wurde nach der Formel

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{(n-1)\,[p]}}$$

berechnet.

Die schon erwähnte erste Auflösung lieferte das Resultat:

$$\Pi = + 0''.074 \pm 0''.019.$$

Diese vorliegende Reihe von Platten ist offenbar nicht geeignet, einen guten Wert der Eigenbewegung zu liefern; wenn jedoch eine grosse Eigenbewegung des Nebelsterns existiert, werden diese Messungen einen annähernd richtigen Wert dafür liefern.

Aus (11) S. 13 (bei Berücksichtigung der Fussbemerkung)

$$-y = \varepsilon_a - \varepsilon_b,^{1})$$

wo ε_a und ε_b diejenigen Aenderungen der Distanzen bezeichnen, welche durch Eigenbewegung der Vergleichsterne und des Nebelsterns eintreten. Denken wir uns für einen Moment den Stern a als fix, während der Nebelstern sich von n bis nach n_1 bewegt. Bezeichnen wir die Strecke nn_1 mit ϱ den Winkel, welchen diese

[1]) a bezieht sich auf die grössere Distanz.

Linie mit dem Meridian bildet, von Norden nach Osten gemessen, mit χ und den Positionswinkel des Sternes a auf n bezogen mit p_a und setzen wir schliesslich:

$$n\,a = r \qquad n_1\,a = r'$$

dann ist:

$$r'^2 = r^2 + \varrho^2 - 2\varrho\, r \cos(\chi - p_a)$$
$$r' = r - \varrho \cos(\chi - p_a) + \ldots .$$
$$r - r' = -\varepsilon_a = \varrho \cos(\chi - p_a)$$
$$= \Delta\,\delta \cos p_a + \Delta\,\alpha \cos\delta \sin p_a,$$

welche die Eigenbewegung des Nebelsternes relativ zum Stern a repräsentiert. Wenn aber der Stern a eine Eigenbewegung hat, so ist:

$$\Delta\,\delta = \Delta\,\delta_n - \Delta\,\delta_a$$
$$\Delta\,\alpha \cos\delta = \Delta\,\alpha_n \cos\delta - \Delta\,\alpha_a \cos\delta,$$

wo $\Delta\,\alpha_n \cos\delta$ und $\Delta\,\delta_n$ die Komponente der Eigenbewegung des Nebelsterns bezeichnen, und entsprechend für Stern a.

Also:

$$-\varepsilon_a = (\Delta\,\delta_n - \Delta\,\delta_a)\cos p_a + (\Delta\,\alpha_n - \Delta\,\alpha_a)\cos\delta \sin p_a$$

und ähnlich

$$-\varepsilon_b = (\Delta\,\delta_n - \Delta\,\delta_b)\cos p_b + (\Delta\,\alpha_n - \Delta\,\alpha_b)\cos\delta \sin p_b.$$

Also

$$y = \Delta\,\delta_n(\cos p_a - \cos p_b) + \Delta\,\alpha_n \cos\delta(\sin p_a - \sin p_b) - A,$$

wo

$$A = \Delta\,\delta_a \cos p_a - \Delta\,\delta_b \cos p_b + (\Delta\,\alpha_a \sin p_a - \Delta\,\alpha_b \sin p_b)\cos\delta.$$

Es ist in dieser Rechnung erlaubt, $\frac{p_a + 180^0 + p_b}{2} = P$ statt p_a und $180^0 + P$ statt p_b zu schreiben. Dann ist:

$$y = 2\,\Delta\,\delta_n \cos P + 2\,\Delta\,\alpha_n \cos\delta \sin P - A. \qquad (12)$$

Wenn wir dieses letzte Glied (A) vernachlässigen, so haben wir eine solche Gleichung für jedes y, und die Grössen $\Delta\,\alpha_n \cos\delta$ und $\Delta\,\delta_n$ lassen sich daraus nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen. Die Vernachlässigung von A verhält sich bei der Lösung wie ein zufälliger Fehler. Der Wert dieses Gliedes ist die Summe der Komponenten der Eigenbewegungen der zwei

Vergleichsterne in den Richtungen ihrer respectiven Verbindungslinien mit dem Nebelstern. Wenn solche Eigenbewegungen der Vergleichsterne in erheblicher Weise vorkommen, wird die Unsicherheit der Lösung durch die grossen übrigbleibenden Fehler gekennzeichnet. Allein in diesem Fall ist eine strenge Lösung unmöglich, denn es ist offenbar unmöglich, durch relative Messungen die Bewegung eines der Sterne von der gemeinsamen Bewegung der anderen in der entgegengesetzten Richtung zu unterscheiden.

Der Gleichung (12) entsprechend haben wir folgende Bedingungsgleichungen, deren Gewichte dem Quadrat des mittleren Fehlers der Grösse y bei der Auflösung der Parallaxe-Gleichungen umgekehrt proportional sind:

p				pvv	
0.9	$-0.200\,a$	$+0.000\,b$	$-0.320=0$	0.0040	$a = 10\,\Delta\,\alpha\cos\delta$
0.1	-0.200	$+0.000$	$+0.408$	0.0439	
0.6	-0.200	-0.007	-0.483	0.0314	$b = 10\,\Delta\,\delta$
1.3	-0.136	$+0.147$	-0.194	0.0008	
0.3	$+0.112$	$+0.176$	$+0.059$	0.0022	
0.5	-0.113	-0.166	-0.039	0.0057	
0.7	-0.131	$+0.151$	$+0.064$	0.0361	
0.9	-0.008	$+0.200$	-0.046	0.0014	

Normalgleichungen $1.105\,a - 0.252\,b + 1.401 = 0$
$+1.032 \quad -0.303 = 0$ $\qquad a = -1.27 \pm 0.45$

Mittlerer Fehler 1 Gl. Gew. 1 $= \pm 0''.145$ $\qquad b = -0.0164 \pm 0.45$

Resultate $\begin{cases} \Delta\,\alpha = -0^s.0101 \pm 0^s.0036 \\ \Delta\,\delta = -0''.002 \pm 0''.045. \end{cases}$

Im Jahre 1891 wurde der Distanz und Positionswinkel vom Nebelstern eines (mit a bezeichneten) benachbarten Sternes von Burnahm mit dem 36 zölligen Refractor der Lick Sternwarte gemessen.[1]) Diese Messungen wurden von Barnard[2]) mit dem 40 zölligen Refractor der Yerkes Sternwarte in den Jahren 1898 und 1899 wiederholt. Es schien eine Aenderung in Distanz und Positionswinkel sich zu zeigen und nachher wurden dieselben Messungen auf photographischen Platten von Prof. Leavenworth[3]) in Minneapolis und Prof. Scheiner[2]) in Potsdam veröffentlicht. Die Möglichkeit ist also vorhanden, einen Wert der Eigenbewegung des Nebels zu bestimmen, sobald die Eigenbewegung des Sternes a bekannt ist. Diese Bestimmung wird möglich durch Vergleichung

[1]) Pub. Lick Obs. Vol. II 1896 p. 165.
[2]) Monthly Notices Vol. LX p. 348.
[3]) Monthly Notices Vol. LXI p. 26.

einer Reihe von Hall[1]) in Washington gemachten mikrometrischen Messungen dieser und benachbarter Sterne mit den neulich wiederholten Messungen derselben Strecken und Positionswinkel.

Das Material zur Bestimmung der Eigenbewegung von *a* stelle ich hier zusammen. Die Gewichte sind die Zahlen der Beobachtungen bezw. Platten. Stern *f* habe ich ausgelassen, weil er eine grosse Eigenbewegung zu zeigen scheint, wie Barnard bemerkt hat.

Hall.

Datum	Strecke	Winkel	Distanz	Gewicht
1877.58	*a* — *b*	225°5	93″90	2
1877.58	*a* — *c*	268 0	115.84	2
1877.59	*a* — *d*	286.9	138.58	2
1877.59	*a* — *e*	292.6	122.90	2
1877.59	*a* — *g*	350.6	77.18	2

Barnard.

Datum	Strecke	Winkel	Distanz	Gewicht
1899.51	*a* — *b*	225°76	93″69	3
1899.50	*a* — *c*	268.78	115.72	3
1899.50	*a* — *d*	286.96	137.77	*W* 4 *D* 3
1899.47	*a* — *e*	292.81	122.28	2
1899.51	*a* — *g*	350.78	76.25	*W* 4 *D* 3

Leavenworth.

Datum	Strecke	Winkel	Distanz	Gewicht
1899.84	*a* — *b*	225°57	94″38	1
1900.13	*a* — *c*	268.63	115.55	2
1900.17	*a* — *d*	286.76	137.44	3
1899.55	*a* — *e*	292.71	122.37	4
1900.17	*a* — *g*	350.32	76.46	3

Mittel mit Gewicht.

Barnard — Leavenworth.

Datum	Strecke	Winkel	Distanz	Gewicht
1899.59	*a* — *b*	225°71	93″86	4
1899.75	*a* — *c*	268.72	115.65	5
1899.83	*a* — *d*	286.87	138.60	*W* 7 *D* 6
1899.52	*a* — *e*	292.74	122.34	6
1899.84	*a* — *g*	350.58	76.36	*W* 7 *D* 6

[1]) A. N. No. 2186 Bd. 92.

Bringen wir die Correction wegen der Precession während 22 Jahren an die Hall'schen Positionswinkel (= —0°14), so haben wir folgende Data:

	Positionswinkel				Distanz		
Strecke	Hall	Hall Cor.	B & L	Δp	Hall	B & L	Δr
$a - b$	225°5	225°4	225°8	+0°4	93″90	93.86	—0″04
$a - c$	268.0	267.9	268.8	+0.9	115.84	115.65	— 0.19
$a - d$	286.9	286.8	286 9	+0.1	138.58	137 60	— 0.98
$a - e$	292.6	292.5	292 8	+0.3	122.90	122.34	— 0.56
$a - g$	350.6	350.5	350 6	+0.1	77.18	76.36	— 0.82

Wir konstruiren jetzt ein ebenes Coordinatensystem mit der Y Achse im Meridian. Bezeichnen ferner die Coordinaten von a zur Zeit $t = 0$ mit x und y, und die von den Vergleichsternen mit $x_1\ x_2 \ldots .$, $y_1\ y_2 \ldots .$ u. s. w. und bezeichnen dieselben Grössen zur Zeit t' mit gestrichenen Buchstaben. Ferner setzen wir:

$$x = x_1 + \xi_1 \qquad y = y_1 + \eta_1$$
$$x = x_2 + \xi_2 \qquad y = y_2 + \eta_2$$
u. s. w. u. s. w.

Es ist dann:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots . x_n}{n} + \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots . \xi_n}{n}$$

$$x' = x + \Delta x = \frac{x_1' + x_2' + \ldots . x_n'}{n} + \frac{\xi_1' + \xi_2' + \ldots . \xi_n'}{n}.$$

Nehmen wir an, dass

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots . x_n}{n} = \frac{x_1' + x_2' + \ldots . x_n'}{n},$$

dann ist

$$\Delta x = \frac{(\xi_1' - \xi_1) + (\xi_2' - \xi_2) + \ldots . (\xi_n' - \xi_n)}{n}$$

und entsprechend für y

$$\Delta y = \frac{(\eta_1' - \eta_1)\,(\eta_2' - \eta_2) \ldots . (\eta_n' - \eta_n)}{n}.$$

Der Bequemlichkeit der numerischen Rechnung halber machen wir folgende Transformation:

$$\xi_1 = -r_1 \sin p_1$$
$$\xi_1' = -(r_1 + \Delta r_1) \sin (p_1 + \Delta p_1)$$
$$\eta_1 = -r_1 \cos p_1$$
$$\eta_1' = -(r_1 + \Delta r_1) \cos (p_1 + \Delta p_1)$$
$$\sin (p_1 + \Delta p_1) = \sin p_1 + \Delta p_1 \cos p_1 + \ldots .$$
$$\cos (p_1 + \Delta p_1) = \cos p_1 - \Delta p_1 \sin p_1 + \ldots .$$

also:

$$\Delta x = \frac{\Sigma(-\Delta r \sin p - r \Delta p \cos p)}{n}$$

$$\Delta y = \frac{\Sigma(-\Delta r \cos p + r \Delta p \sin p)}{n}$$

$$\Delta x = \Delta \alpha \cos \delta$$
$$\Delta y = \Delta \delta.$$

Die Auflösung liefert:

$$\Delta \alpha \cos \delta = \frac{-0.43 + 0.12 + 1.01 + 0.77 + 0.27}{5} = +0''.35 \pm 0''.57$$

$$\Delta \delta = \frac{+0.50 + 1.83 - 0.05 + 0.39 - 0.79}{5} = +0''.38 \pm 0''.96$$

oder jährlich $\begin{cases} \Delta \alpha \cos \delta = -0''.016 \pm 0''.026 \\ \Delta \delta = -0''.017 \pm 0''.044. \end{cases}$

Der grosse mittlere Fehler ist auffallend und es lässt sich vermuten, dass ein oder mehrere der Vergleichsterne beträchtliche Eigenbewegungen haben. Ferner sieht man augenblicklich, dass die Distanzmessungen einerseits und die Positionswinkel anderseits, jede für sich betrachtet, Eigenbewegungen für a in entgegengesetzten Richtungen liefern.

Wir können einen Wert der Eigenbewegung von a aus den Distanzmessungen allein folgenderweise ableiten:

Bezeichnen wir die Eigenbewegung von a mit ϱ und den Winkel, welchen ihre Richtung mit dem Meridian bildet (von Norden durch Osten gemessen) mit χ; p sei der Positionswinkel des Vergleichsternes bezogen auf a. Dann ist:

$$\Delta r = -\dot{\varrho}\cos(\chi - p)$$
$$= -\Delta\alpha\cos\delta\sin p - \Delta\delta\cos p.$$

Für die Positionswinkel allein haben wir entsprechend:

$$\sin 1'' \, r\,\Delta p = -\varrho\sin(\chi - p)$$
$$= -\Delta\alpha\cos\delta\cos p + \Delta\delta\sin p.$$

Wir haben also folgende Bedingungsgleichungen:

Aus den Distanzen:

			vv	
$+0.702\,b$	$+0.712\,a$	$+0.04 = 0$	0.0310	
$+0.021$	$+1.000$	$+0.19$	0.0807	
-0.278	$+0.960$	$+0.98$	0.1030	$a = \Delta\alpha\cos\delta$
-0.376	$+0.926$	$+0.56$	0.0225	$b = \Delta\delta$
-0.985	$+0.172$	$+0.82$	0.0034	
			$+0.2400$	

Normalgleichungen: $1.681\,b - 0.263\,a - 1.284 = 0$
$+3.316\,a + 1.794 = 0$

$\Delta\alpha\cos\delta = -0''.487 \pm 0''.155$
$\Delta\delta = +0.688 \pm 0.217$

oder jährlich: $\Delta\alpha\cos\delta = -0''.022 \pm 0''.007$
$\Delta\delta = +0.031 \pm 0.010$

Aus den Winkeln:

			vv
$+0.702\,a$	$-0.712\,b$	$+0.04 = 0$	0.022
$+0\,021$	-1.000	$+0.19$	0.740
-0.278	$+0.960$	$+0.98$	0.397
-0.376	$+0.926$	$+0.56$	0.032
-0.985	$+0.172$	$+0.82$	0.026
			1.217

Normalgleichungen: $1.68\,a + 0.26\,b - 0.05 = 0$
$3.32\,b + 3.13 = 0$

$\Delta\alpha\cos\delta = +0.18 \pm 0.50$
$\Delta\delta = -0.96 \pm 0.35$

oder jährlich: $\Delta\alpha\cos\delta = +0''.008 \pm 0''.023$
$\Delta\delta = -0.044 \pm 0.016$

Schreiben wir diesen Resultaten Gewichte zu, die dem reciprocen Quadrat der mittleren Fehler proportional sind, so bekommen wir:

$$\Delta\alpha\cos\delta = -0''.43 \pm 0''.15$$
$$\Delta\delta = +0.22 \pm 0.18$$

oder jährlich: $\Delta\alpha\cos\delta = -0''.020 \pm 0''.007$
$\Delta\delta = +0.010 \pm 0.010.$

Obgleich diese Resultate wenig befriedigend sind, dürfen wir doch schliessen, dass der Stern a keine beträchtliche Eigenbewegung hat.

Das Material zur Bestimmung der Eigenbewegung des Nebelsternes, wenn die des Sternes a bekannt ist, ist von Prof. Leavenworth[1]) zusammengestellt worden. Es ist folgendes:

Gew.				
5	Burnahm	1891.45	87°.8	61″.70
1	Scheiner	1894.83	89.07	60.85
5	Barnard	1898.60	88.77	60.70
5	Barnard	1899.48	89.14	60.66
4	Leavenworth	1899.55	89.29	60.56

Die Gewichte sind der Anzahl der Beobachtungen bezw. der Platten gleich. Der Stern a ist auf den Nebel bezogen.

Da der Positionswinkel nahezu gleich 90° ist, wird es sich empfehlen, $\Delta\alpha$ aus den Distanzen und $\Delta\delta$ aus den Positionswinkeln zu bestimmen. Bezeichnen wir mit r und p die Distanzen und Positionswinkel zur Zeit $t = 1895.0$ und die entsprechenden Grössen zur Zeit t' mit gestrichenen Buchstaben. $\Delta\alpha_a \cos\delta$ und $\Delta\delta_a$ bezeichnen die Componenten der Eigenbewegung von a und $\Delta\alpha_n \cos\delta$, $\Delta\delta_n$ die entsprechenden Grössen für den Nebelstern. Es ist dann:

$$r + t(\Delta\alpha_a - \Delta\alpha_n)\cos\delta = r'$$

oder

$$x - ty + n = 0,$$

wo:

$$x = r - 60''.50$$
$$y = \Delta\alpha_n \cos\delta$$
$$n = t\,\Delta\alpha_a \cos\delta + 60''.50 - r'$$

und

$$(p)'' r'' \sin 1'' + t(\Delta\delta_n'' - \Delta\delta_a'') = (p')'' r'' \sin 1''$$

oder

$$10^4 x + \frac{t}{r'' \sin 1''} y - n = 0,$$

wo:

$$x = (p - 88°.50)'' 10^{-4}$$
$$y = \Delta\delta_n$$
$$n = (p' - 88°.50)'' + \frac{t\,\Delta\delta_a}{r'' \sin 1''}.$$

[1]) Monthly Notices Vol. LXI p. 26.

Die Bedingungsgleichungen sind folgende (indem wir die Gleichungen des zweiten Systems mit 10^4 dividieren):

Aus Distanzen:

Gew.		pvv
5	$1.00\,x - 3.55\,y - 1.27 = 0$	0.0080
1	$-0.17 \quad -0.35$	0.1369
5	$+3.60 \quad -0.13$	0.0005
5	$+4.48 \quad -0.07$	0.0180
4	$+4.55 \quad +0.03$	0.0016
		0.1650

Normalgleichungen: $20.0\,x + 40.7\,y - 7.58 = 0$

$+311 \quad y + 19.4 = 0$

(jährlich) $\Delta\alpha \cos\delta = -0''.15 \pm 0''.016$

$\Delta\alpha = -0^s.012 \pm 0^s.0013$

Aus Positionswinkeln:

	pvv
$1.00\,x - 1.22\,y + 0.253 = 0$	0.0020
$-0.06 \quad -0.206$	0.0595
$+1.23 \quad -0.098$	0.0328
$+1.54 \quad -0.232$	0.0000
$+1.56 \quad -0.287$	0.0140
	0.1083

Normalgleichungen: $20.0\,x + 13.9\,y - 1.76 = 0$

$+36.5\,y - 5.71 = 0$

(jährlich) $\Delta\delta = +0''.168 \pm 0.037.$

Die Correction wegen jährlicher Precession wurde vernachlässigt:

$$\frac{dp}{dt} = n \sin\alpha \sec\delta = -0^s.0065 = -23''.4.$$

Dies entspricht $\Delta\delta = -23''.4\,r \sin 1'' = -0''.007.$

Obiger Wert verlangt also eine Verbesserung von $+0''.007$

$$\Delta\delta = +0''.175 \pm 0''.037.$$

Eine Vereinigung dieser Resultate mit denen, die aus der Parallaxe-Bestimmung abgeleitet wurden, ergiebt, wenn man noch Gewichte proportional dem reciprocen Quadrat des mittleren Fehlers beilegt, folgenden Wert der Eigenbewegung des Nebelsterns:

$$\Delta\alpha = -0^s.012 \pm 0^s.0012$$
$$\Delta\delta = +0''.10 \pm 0''.029.$$

Dass der Zentralstern des Ringnebels in der Leyer mit dem Nebel physisch verbunden ist, wird dadurch einigermassen wahrscheinlich gemacht, dass fast alle ähnlichen Objecte „Zentral-

sterne“ besitzen.[1]) Bei genauer Focusierung hat man ferner herausgestellt, dass die Einstellungen für den Zentralstern etwa in der Mitte liegen zwischen denen für den Nebel und denen für einen gewöhnlichen Fixstern, was beim Vorherrschen kurzwelliger Strahlen im Nebellicht für die Annahme einer nebligen Structur des Zentralsternes spricht.[2])

Zum Schluss möchte ich meinen Dank denen aussprechen, unter deren Leitung diese Arbeit ausgeführt worden ist, namentlich: Herrn Prof. Leavenworth, welchem ich die Anregung und die Möglichkeit der Untersuchung verdanke, indem er mir in gütiger Weise die Instrumente der Sternwarte zur Verfügung stellte, und ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Seeliger, unter dessen Führung diese Arbeit vollendet wurde.

---

[1]) Siehe Pub. Lick Obs. Vol. II pag. 159.

[2]) Näheres hierüber siehe: Scheiner, Astr. N. Bd. 129 pag. 239. Keeler Astr. N. Bd. 130 pag. 227. Barnard, Monthly Notices Vol. LX pag. 255.

Ueber einen Versuch, die Parallaxe zweier planetarischen Nebel zu bestimmen. siehe: Astr. N. Bd. 133 p. 353, Bd. 136 p. 349.

Der Verfasser dieser Arbeit ist in Ellenville N. Y. in den Vereinigten Staaten von Amerika geboren und zwar am 1. Mai 1876. Nach vierjährigem Besuch der „High School“ in Minneapolis, in Minnesota, promovierte er und besuchte die Universität von Minnesota in Minneapolis. Im Jahre 1897 erlangte er den Grad „Bachelor in Artibus“ und im Jahre 1899 den Grad „Magister in Artibus“.

Vom September 1897 bis Juli 1900 war er „Assistant“ in der Sternwarte der Universität von Minnesota. Seit August 1900 ist er in München, woselbst er Vorlesungen über Astronomie, Mathematik und Physik hört.

Tafel I.

Sternwarte der Universität von Minnesota.

Länge $6^h\ 12^m\ 56^s.8$ W von Gr. Breite $44^0\ 58'\ 40''$. Position des Nebels: $\alpha\ 18^h\ 48^m\ 23^s$, $\delta + 32^0\ 51'$.

Platte	Datum	Gemacht von	Expositions-Zeit	Zenith-Distanz	Par. Winkel	Therm.	Bar.	Bemerkungen
40	Sept. 1. 1897	L.	$21^h\ 20^m$	$22^h\ 48^m$	$39^0\ 26'$	$57^0\ 24'$		Nebelstern schwach
42	Sept. 18. 1897	Beane	Mittel 21^h	— 42	35 3	57 4	+ 10° C.	Bilder sehr schlecht.
48	Sept. 23. 1897	Beane	„ 22	0	38 19	57 21	+ 16	29.25 Stern 4 schwach und nebelhaft.
100	Sept. 11. 1899	Bauer	$21^h\ 44^m$	24 10	48 21	56 32	+ 18	29.0 Bilder verlängert.
103	Oct. 4. 1899	N.	20 9	22 38	32 14	56 28	+ 8	29.5 Bilder gut.
105	Oct. 30. 1899	N.	21 4	23 4	39 11	57 23	+ 10.3	29.18 Bilder doppelt.
107	Nov. 1. 1899	N.	21 4	23 8	39 32	57 23	— 1.0	29.65 Mittelmässig.
110	März 30. 1900	N.	14 47	16 48	37 15	57 18	0.0	29.55 Stern 2 verlängert.
111	April 1. 1900	N.	15 13	16 54	34 24	56 58	+ 1.0	29.22 Nebelstern stärker auf einer Seite.
113	Mai 2. 1900	N.	16 40	18 15	19 57	46 44	+ 3.0	29.30 Bilder gross und nebelhaft.
114	Mai 3. 1900	N.	16 12	18 7	22 48	50 40	+ 1.5	29.18 Bilder sehr gut.
117	Mai 26. 1900	N.	16 47	18 43	17 32	41 39	+ 14.5	29.18 „ „ „
119	Juni 5. 1900	N.	17 21	19 26	13 11	21 39	+ 19.1	28.88 „ „ „
121	Sept. 17. 1900	L.	20 42	22 44	35 23	57 7	+ 8	29.4
123	Sept. 21. 1900	L.	20 30	22 30	33 6	56 40	+ 13	29.2

L. = Prof. F. P. Leavenworth. Beane = Prof. Beane, Professor der Physik an der „North Side High School“ in Minneapolis. Bauer = Dr. George N. Bauer, jetziger „Instructor in Mathematics“ in der Universität von Minnesota. N. = B. L. Newkirk.

Die Werte der Zenith-Distanzen und der parallactischen Winkel wurden mit Werten der Expositionszeiten ein wenig anders von diesen hier gegebenen berechnet, denn die Fehler der Uhr waren mir zur Zeit der Ausrechnung unbekannt.

Tafel II.

Zur Identification der Vergleichsterne.

Stern	Positions-Winkel	Distanz	Grösse
1	88° 6′	1494″.1	13 0^m
2	269 48	1520.1	12.8
3	88 21	819.4	14.0
4	270 42	827.2	14.2
5	87 42	575.2	13
6	267 57	613.1	14
7	317 23	236.5	13
8	136 22	232 7	13
9	41 48	264.0	14
10	206 27	258.6	13.5
11	35 14	596.5	14
12	213 42	599.4	13.5
13	313 20	752.0	11
14	144 47	626.2	11.2
15	357 34	730.0	13
16	179 41	670.4	13.5

Tafel III.

Gemessene Distanzen, wegen der Fehler des Messapparates corrigiert.

Stern / Platte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
40	25 0416	25 4930			9.6289	10.2892	3.9675	3.8992	4.4252	4.3304	10.0101	10.0512	12.6039	10.4994	12.2302	11.2408
42	25 0538	25.4973			9.6432	10.2870	3.9676	3.8965	4.4374	4.3434	9.9974	10.0642	12.6000	10.5170	12.2416	11.2417
48	25.0604	25.4750	13.7512	13.8618	9 6613	10 2778	3 9621	3.9043	4.4422	4.3281	10.0276	10.0456	12.6151	10.5065	12.2523	11.2325
100	25 0222	25 4866	13.7119	13.8775	9.6224	10 2906	3 9721	3.8888	4.4195	4.3306	9.9973	10.0442	12.6094	10.4879	12.2316	11.2298
103	25 0454	25.4678	13 7412	13.8516	9 6457	10.2660	3 9552	3.9042	4.4261	4.3327	9.9958	10.0443	12.6044	10.5019	12.2292	11.2305
105	25.0434	25.4742			9.6362	10 2590	3.9603	3.9034	4.4186	4.3416	9.9898	10.0542	12.5990	10.5006	12.2300	11.2426
107	25 0360	25 4683	13 7274	13.8583	9.6424	10.2686	3.9650	3.9014	4.4272	4.3265	10.0072	10.0482	12.6067	10.5028	12.2354	11.2332
110	25.0323	25 4695	13.7322	13 8666	9.6409	10 2696	3 9632	3.8992	4.4172	4.3360	9.9935	10.0511	12.5994	10.5005	12.2296	11.2332
111	25 0327	25.4737	13.7314	13.8667	9.6435	10 2774	3 9702	3.8985	4.4290	4.3298	10.0036	10.0460	12.6062	10.4973	12.2360	11.2262
113	25 0542	25.4752	13.7402	13.8601	9.6402	10 2802	3.9620	3.9130	4.4137	4.3470	10.0020	10.0647	12.6000	10.5135	12.2278	11.2478
114	25.0408	25.4716	13 7386	13.8726	9.6454	10.2804	3.9646	3.9020	4.4270	4.3281	10.0058	10.0548	12.6084	10.5030	12.2285	11.2394
117	25.0496	25.4880	13.7305	13.8722	9.6378	10 2816	3.9694	3.9055	4.4289	4.3318	10.0000	10.0457	12.6073	10.4984	12.2364	11.2380
119	25.0444	25.4821	13.7304	13 8656	9.6396	10 2775	3.9634	3.9008	4.4204	4.3332	10.0005	10.0481	12.6078	10.4984	12.2330	11.2342
121	25 0460	25.4776			9.6432	10.2783	3.9665	3.9066	4.4320	4.3326	9.9990	10.0558	12.6009	10.5028	12.2335	11.2408
123	25.0500	25.4796	13.7369	13.8636	9.6466	10 2676	3.9636	3.9070	4.4328	4.3263	10.0080	10.0380	12.6062	10.5120	12.2295	11.2452

Tafel IV.

Correctionen wegen Refraction.

Platte	ζ	Stern / $\log k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
100	48° 21′	6.420	128	129	71	70	50	53	12	11	26	23	56	56	36	28	44	41
40	39 26	6.444	106	108	58	58	41	44	12	11	20	18	45	44	37	30	41	38
42	35 3	6.444	96	97	52	53	37	40	12	11	18	17	40	40	37	30	39	36
114	22 48	6.451	80	81	44	44	31	33	12	11	15	14	33	33	36	30	38	35
119	13 11	6.451	70	71	38	39	27	29	11	11	13	13	30	30	35	29	37	34

Correctionen.

Platte	ζ	Stern / $\frac{k'}{k}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
40	39° 26′	1.000	106	108			41	44	12	11	20	18	45	44	37	30	41	38
42	35 3	1.000	96	97			37	40	12	11	18	17	40	40	37	30	39	36
48	38 19	0.968	99	100	53	53	39	42	12	11	19	17	43	42	36	29	39	36
100	48 21	1.000	128	129	71	70	50	53	12	11	26	23	56	56	36	28	44	41
103	32 14	1.005	88	89	48	49	34	37	12	11	17	16	37	37	37	30	39	36
105	39 11	0.982	103	104			40	43	12	11	20	18	44	43	36	29	40	37
107	39 32	1.048	111	113	61	61	43	46	13	12	21	19	47	46	39	32	43	40
110	37 15	1.045	106	108	58	58	41	44	13	12	20	19	44	44	39	32	42	39
111	34 24	1.019	96	97	52	53	37	40	12	11	18	17	40	40	38	31	40	37
113	19 57	1.002	77	78	42	42	30	32	12	11	14	14	32	32	36	30	38	35
114	22 48	1.000	80	81	44	44	31	33	12	11	15	14	33	33	36	30	38	35
117	17 32	0.957	72	73	39	39	30	32	11	11	13	13	30	30	34	29	36	33
119	13 11	0.918	64	65	35	36	24	27	10	10	12	12	28	28	32	27	34	31
121	35 23	1.000	97	98			37	40	12	11	18	17	40	40	37	30	39	36
123	33 6	0.975	89	90	48	49	34	37	12	11	17	16	37	37	36	29	36	34

Diese Correctionen sind in der vierten Decimalstelle eines Scalateiles gegeben und sind mit dem positiven Vorzeichen unmittelbar anzubringen.

Tafel V.

Correction wegen Aberration.

Platte	$\frac{\Delta s}{s}$
40	— 0.438
42	— 0.519
48	— 0.535
100	— 0.489
103	— 0.557
105	— 0.532
107	— 0 525
110	+ 0.556
111	+ 0.558
113	+ 0.515
114	+ 0.510
117	+ 0.385
119	+ 0.313
121	— 0.513
123	— 0.527

Die Correctionen werden erhalten durch Multiplikation der Strecke (in ganzen Scalateilen ausgedrückt) mit dem Faktor, $\frac{\Delta s}{s}$, und ist mit dem eben versehenen Vorzeichen anzubringen. Die so gefundene Correction ist in Einheiten der vierten Decimalstelle eines Scalateiles ausgedrückt.

Tafel VI.

Distanzen, wegen Tangentialdistorsion, Refraction und Aberration corrigiert.

Stern / Platte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
40	25.0507	25.5022			9.6326	10.2932	3.9685	3.9001	4.4270	4.3320	10.0142	10.0552	12.6070	10.5019	12.2338	11.2441
42	25.0617	25.5052			9.6464	10.2905	3.9686	3.8974	4.4390	4.3449	10.0009	10.0677	12.6031	10.5195	12.2449	11.2447
48	25.0686	25.4836	13.7558	13.8664	9.6647	10.2815	3.9631	3.9052	4.4439	4.3296	10.0314	10.0493	12.6181	10.5089	12.2556	11.2355
100	25.0334	25.4978	13.7184	13.8839	9.6269	10.2954	3.9731	3.8897	4.4219	4.3327	10.0024	10.0493	12.6124	10.4802	12.2354	11.2334
103	25.0524	25.4748	13.7453	13.8558	6.6486	10.2692	3.9562	3.9051	4.4276	4.3341	9.9990	10.0475	12.6075	10.5043	12.2325	11.2335
105	25.0520	25.4827			9.6397	10.2628	3.9613	3.9043	4.4204	4.3432	9.9937	10.0580	12.6020	10.5030	12.2334	11.2457
107	25.0454	25.4777	13.7328	13.8637	9.6162	10.2727	3.9661	3.9024	4.4291	4.3282	10.0114	10.0523	12.6100	10.5055	12.2391	11.2366
110	25.0439	25.4813	13.7387	13.8731	9.6455	10.2745	3.9647	3.9006	4.4194	4.3381	9.9984	10.0560	12.6039	10.5042	12.2344	11.2377
111	25.0437	25.4848	13.7403	13.8727	9.6477	10.2819	3.9716	3.8998	4.4310	4.3317	10.0081	10.0505	12.6106	10.5009	12.2406	11.2305
113	25.0628	25.4838	13.7451	13.8650	9.6437	10.2839	3.9634	3.9143	4.4153	4.3486	10.0057	10.0684	12.6042	10.5170	12.2322	11.2519
114	25.0497	25.4805	13.7137	13.8777	9.6490	10.2842	3.9660	3.9033	4.4287	4.3297	10.0096	10.0586	12.6126	10.5065	12.2329	11.2435
117	25.0574	25.4958	13.7349	13.8766	9.6412	10.2852	3.9707	3.9068	4.4304	4.3333	10.0034	10.0491	12.6112	10.5017	12.2405	11.2417
119	25.0512	25.4889	13.7343	13.8696	9.6423	10.2805	3.9645	3.9019	4.4217	4.3345	10.0036	10.0512	12.6114	10.5014	12.2368	11.2377
121	25.0540	25.4856			9.6464	10.2818	3.9675	3.9075	4.4336	4.3341	10.0025	10.0593	12.6040	10.5058	12.2368	11.2438
123	25.0572	25.4868	13.8677	13.7411	9.6495	10.2708	3.9646	3.9079	4.4343	4.3277	10.0112	10.0412	12.6092	10.5144	12.2325	11.2480

Tafel VII.

Correction wegen Verschiedenheit des Scalawertes.

Distanz / Platte	1—2	3—4	5—6	7—8	9—10	11—12	13 14	15—16
40	— 2.67		— 0.2	— 0.4	+ 4.3	— 4.1	+ 2.1	— 0.1
42	— 5.45		— 5.8	+ 2.9	— 24.1	— 3.7	— 3.8	— 5.1
48	— 2.53	— 4.6	— 10.5	0.0	— 12.2	— 9.8	— 5.7	— 5.7
100	+ 1.62	+ 2.6	+ 1.6	+ 7.0	+ 9.4	+ 4.7	+ 4.8	+ 3.7
103	+ 2.42	+ 3.0	+ 3.8	+ 8.9	+ 1.3	+ 7.3	+ 0.9	+ 4.9
105	+ 0.91		+ 11.5	+ 3.4	— 0.9	+ 4.7	+ 3.8	— 0.6
107	+ 3.21	+ 4.7	+ 3.3	— 0.2	+ 6.3	— 1.3	— 0.7	+ 0.8
110	+ 2.81	— 0.9	+ 2.7	+ 3.8	+ 6.2	+ 3.3	+ 2.5	+ 2.3
111	+ 2.16	— 1.3	— 2.1	— 4 0	+ 0.1	+ 1.2	+ 1.0	+ 2.8
113	— 1.43	— 0.2	— 1.1	— 12.0	— 1.3	— 6.5	— 3.2	— 2.8
114	+ 0.82	— 4.4	— 3.9	— 1.3	+ 5.0	— 3.5	— 2.3	+ 0.5
117	— 2.74	— 0.8	— 0.5	— 11.7	— 1.0	+ 4.3	+ 0.4	— 2.0
119	— 0.14	+ 2.0	+ 1.3	+ 2.4	+ 7.5	+ 3.1	+ 0.5	+ 1.3
121	— 0.04		— 1.4	— 8.5	— 5.6	— 0.4	+ 2.0	— 1.3
123	— 0.96	+ 0.2	+ 2.6	+ 0.8	+ 0.9	+ 4.3	— 4.2	— 1.2

Diese Faktoren sind mit der zu verbessernden Distanz (in Scalateilen) zu multiplizieren, um die Correction in Einheiten der vierten Decimalstelle einer Scaladivision zu erhalten.

Tafel VIII.

Vollständig verbesserte Distanzdifferenzen.

Sternpaar / Platte	1—2	3—4	5—6	7—8	9—10	11—12	13 - 14	15 - 16
40	0.4514		0.6606	0.0683	0.0950	0.0410	2.1056	0.9897
42	0.4432		0.6436	0.0711	0.0938	0.0668	2.0828	0.9997
48	0.4148	0.1106	0.6161	0.0579	0.1142	0.0179	2.1080	1.0195
100	0.4643	0.1656	0.6686	0.0834	0.0892	0.0470	2.1232	1.0025
103	0.4225	0.1106	0.6207	0.0511	0.0936	0.0485	2.1034	0.9995
105	0.4308		0.6239	0.0570	0.0772	0.0643	2.0998	0.9876
107	0.4325	0.1310	0.6267	0.0637	0.1010	0.0409	2.1044	1.0026
110	0.4375	0.1344	0.6291	0.0641	0.0813	0.0576	2.1002	0.9969
111	0.4412	0.1324	0.6341	0.0718	0.0993	0.0424	2.1100	1.0104
113	0.4209	0.1200	0.6401	0.0491	0.0666	0.0627	2 0866	0.9800
114	0.4308	0.1340	0.6350	0.0628	0 0990	0 0490	2.1056	0.9894
117	0.4382	0.1415	0.6440	0.0639	0.0971	0.0458	2.1096	0.9986
119	0.4377	0.1354	0.6382	0.0625	0.0872	0.0476	2.1101	0.9992
121	0.4316		0.6352	0.0600	0.0995	0.0568	2.0991	0.9929
123	0.4296	0.1266	0.6213	0.0567	0.1066	0.0300	2.0940	0.9845

Tafel IX.

Parallaxe Coefficienten.

Stern	1	2	3	4	5	6	7	8
S 3	— 0.2210	+ [illegible]068	— 0.2175	+ 0.1839	— 0.2269	+ 0.2232	— 0.4732	+ 0.4607
S 4	— 0.9730	+ 0.9772	— 0.9736	+ 0.9786	— 0.9718	+ 0.9725	+ 0.7463	— 0.7575

Stern	9	10	11	12	13	14	15	16
S 3	— 0.7417	+ 0.8219	— 0.7830	+ 0.7910	— 0.4228	+ 0.5594	— 0.8126	+ 0.8204
S 4	— 0.5659	+ 0.3322	— 0.4701	+ 0.4467	+ 0.7896	— 0.6574	+ 0.1562	— 0.1199

Platte	40	42	48	100	103	105 107	110 111	113 114	117	119	121 123
P 3	— 0.358	— 0.074	+ 0.012	— 0.201	+ 0.190	+ 0.607	— 0.178	— 0.675	— 0.916	— 0.977	— 0.070
P 4	+ 0.943	+ 1.001	+ 1.004	+ 0.986	+ 0.982	+ 0.784	— 0.984	— 0.749	— 0.433	— 0.275	+ 1.002

Tafel X.

Bedingungsgleichungen. Paar 1—2.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.4300.

Platte	Gewicht					v	pvv
40	1.0	$1.00\,x$	$-2.33\,y$	$+1.69\,\pi$	$+2.14=0$	$+0.65$	0.42
42	0.5		-2.28	$+1.92$	$+1.32$	-0.12	0.01
48	0.1		-2.27	$+1.95$	-1.52	-2.95	0.87
100	0.1		-0.30	$+1.84$	$+3.45$	$+3.06$	0.94
103	1.0		-0.24	$+1.99$	-0.75	-1.09	1.19
105	0.5		-0.17	$+1.78$	$+0.08$	-0.25	0.03
107	1.0		-0.17	$+1.78$	$+0.25$	-0.08	0.01
110	1.0		$+0.25$	-1.99	$+0.75$	$+0.21$	0.04
111	0.5		$+0.25$	-1.99	$+1.12$	$+0.58$	0.17
113	1.0		$+0.34$	-1.74	-0.91	-1.37	1.88
114	2.0		$+0.34$	-1.74	$+0.08$	-0.38	0.29
117	2.0		$+0.40$	-1.22	$+0.82$	$+0.45$	0.40
119	2.0		$+0.43$	-0.95	$+0.77$	$+0.45$	0.40
121	1.0		$+0.72$	$+1.92$	$+0.16$	$+0.32$	0.10
123	1.0		$+0.72$	$+1.92$	-0.04	$+0.12$	0.01
							6.75

Normalgleichungen:

$$+14.70\,x + 0.27\,y - 1.02\,\pi + 6.39 = 0$$
$$+10.84\,y - 9.12\,\pi - 4.63 = 0$$
$$+41.32\,\pi - 0.29 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)	In Bogensecunden
$\pi = +0.114$	$\pi = +0''.068 \pm 0''.078$
$y = +0.533$	$y = +0.320 \pm 0.151$
$x = -0.436$	

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.450$.

Bedingungsgleichungen. Paar 3—4.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.1300.

Platte	Gewicht					v	pvv
48	0.1	$1.00\,x$	$-2.27\,y$	$+1.95\,\pi$	$-1.94=0$	$+0.17$	0.00
100	0.1		-0.30	$+1.84$	$+3.56$	$+4.31$	1.86
103	1.0		-2.24	$+1.99$	-1.94	-1.20	1.44
107	1.0		-0.17	$+1.77$	$+0.10$	$+0.75$	0.56
110	1.0		$+0.25$	-1.99	$+0.44$	-0.01	0.00
111	0.5		$+0.25$	-1.99	$+0.24$	-0.21	0.02
113	1.0		$+0.34$	-1.73	-1.00	-1.45	2.10
114	2.0		$+0.34$	-1.73	$+0.40$	-0.05	0.00
117	2.0		$+0.40$	-1.21	$+1.15$	$+0.77$	1.19
119	2.0		$+0.43$	-0.93	$+0.54$	$+0.20$	0.08
123	1.0		$+0.72$	$+1.92$	-0.34	-0.24	0.06
							7.31

Normalgleichungen:

$$+11.70\,x + 3.10\,y - 6.40\,\pi + 1.73 = 0$$
$$+2.26\,y - 4.20\,\pi + 1.98 = 0$$
$$+30.98\,\pi - 8.59 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)	In Bogensecunden
$\pi = +0.216$	$\pi = +0''.130 \pm 0''.098$
$y = -0.680$	$y = -0.408 \pm 0.427$
$x = +0.150$	

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.47$.

Tafel X.

Bedingungsgleichungen. Paar 5—6.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.6300.

Platte	Gewicht					v	pvv
40	1.0	$1.00\,x$	$-2.33\,y$	$+1.67\,\pi$	$+3.06=0$	$+1.09$	1.19
42	0.5		-2.28	$+1.92$	$+1.36$	-0.50	0.12
48	0.1		-2.27	$+1.95$	-1.39	-3.23	1.04
100	0.1		-0.30	$+1.83$	$+3.86$	$+3.58$	1.28
103	1.0		-0.24	$+1.99$	-0.93	-1.11	1.23
105	0.5		-0.17	$+1.80$	-0.61	-0.80	0.32
107	1.0		-0.17	$+1.80$	-0.33	-0.52	0.27
110	1.0		$+0.25$	-2.00	-0.09	-1.06	1.12
111	0.5		$+0.25$	-2.00	$+0.41$	-0.56	0.16
113	1.0		$+0.34$	-1.76	$+1.01$	$+0.18$	0.03
114	2.0		$+0.34$	-1.76	$+0.50$	-0.33	0.22
117	2.0		$+0.40$	-1.25	$+1.40$	$+0.77$	1.19
119	2.0		$+0.43$	-0.98	$+0.82$	$+0.30$	0.18
121	1.0		$+0.72$	$+1.92$	$+0.52$	$+1.08$	1.19
123	1.0		$+0.72$	$+1.92$	-0.87	-0.31	0.10
							9.64

Normalgleichungen:

$$+14.70\,x + 0.27\,y - 1.20\,\pi + 8.64 = 0$$
$$+10.83\,y - 9.14\,\pi - 5.87 = 0$$
$$+41.88\,\pi - 5.68 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)

$\pi = +0.294$
$y = +0.805$
$x = -0.579$

In Bogensecunden

$\pi = +0''.176 \pm 0''.092$
$y = +0.483 \pm 0.179$

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.54$.

Bedingungsgleichungen. Paar 7—8.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.0600.

Platte	Gewicht					v	pvv
40	1.0	$1.00\,x$	$-2.33\,y$	$+1.75\,\pi$	$+0.83=0$	$+0.12$	0.01
42	0.5		-2.28	$+1.57$	$+1.11$	$+0.39$	0.08
48	0.1		-2.27	$+1.49$	-0.21	-0.95	0.09
100	0.1		-0.30	$+1.67$	$+2.34$	$+2.27$	0.52
103	1.0		-0.24	$+1.29$	-0.89	-1.00	1.00
105	0.5		-0.17	$+0.61$	-0.30	-0.49	0.12
107	1.0		-0.17	$+0.61$	$+0.37$	$+0.18$	0.03
110	1.0		$+0.25$	-1.30	$+0.41$	$+0.06$	0.00
111	0.5		$+0.25$	-1.30	$+1.18$	$+0.83$	0.34
113	1.0		$+0.34$	-0.49	-1.09	-1.29	1.66
114	2.0		$+0.34$	-0.49	$+0.28$	$+0.08$	0.01
117	2.0		$+0.40$	$+0.20$	$+0.39$	$+0.32$	0.20
119	2.0		$+0.43$	$+0.50$	$+0.25$	$+0.24$	0.11
121	1.0		$+0.72$	$+1.56$	$+0.00$	$+0.24$	0.06
123	1.0		$+0.72$	$+1.56$	-0.33	-0.09	0.01
							4.22

Normalgleichungen:

$$+14.70\,x + 0.27\,y + 6.14\,\pi + 2.35 = 0$$
$$+10.80\,y - 4.87\,\pi - 2.67 = 0$$
$$+15.70\,\pi + 0.53 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)

$\pi = +0.157$
$y = +0.323$
$x = -0.232$

In Bogensecunden

$\pi = +0''.094 \pm 0''.108$
$y = +0.194 \pm 0.124$

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.356$.

Tafel X.

Bedingungsgleichungen. Paar 9—10.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.0900.

Platte	Gewicht				v	pvv
40	1.0	$1.00\,x - 2.33\,y - 0.29\,\pi + 0\,50 = 0$			$+0.24$	0.06
42	0.5	-2.28	-0.78	$+0.38$	$+0.00$	0.00
48	0.1	-2.27	-0.92	$+2.42$	$+2.00$	0.40
100	0.1	-0.30	-0.58	-0.08	-0.61	0.04
103	1.0	-0.24	-1.18	$+0.36$	-0.33	0.11
105	0.5	-0.17	-1.66	-1.28	-2.08	2.16
107	1.0	-0.17	-1.66	$+1.10$	$+0.30$	0.09
110	1.0	$+0.25$	$+1.16$	-0.87	-1.03	1.06
111	0.5	$+0.25$	$+1.16$	$+0.93$	$+0.77$	0.30
113	1.0	$+0.34$	$+1.72$	-2.34	-2.37	5.61
114	2.0	$+0.34$	$+1.72$	$+0.90$	$+0.87$	1.51
117	2.0	$+0.40$	$+1.82$	$+0.71$	$+0.69$	0.95
119	2.0	$+0.43$	$+1.77$	-0.28	-0.31	0 19
121	1.0	$+0.72$	-0.79	$+0.95$	$+0.27$	0.07
123	1.0	$+0.72$	-0.79	$+1.66$	$+0.98$	0.96
						13.51

Normalgleichungen:

$$+14.70\,x + 0.27\,y + 8.00\,\pi + 4.26 = 0$$
$$+10.82\,y + 6.51\,\pi - 0.41 = 0$$
$$+31.06\,\pi - 3.56 = 0$$

In Scalâteilen (2. Decimalstelle)

$\pi = +0.244$
$y = -0.099$
$x = -0.421$

In Bogensecunden

$\pi = +0''.146 \pm 0''.133$
$y = -0.059 \pm 0.234$

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.636$.

Bedingungsgleichungen. Paar 11—12.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 0.0400.

Platte	Gewicht				v	pvv
40	1.0	$1.00\,x - 2.33\,y + 0.30\,\pi + 0.10 = 0$			-0.83	0.69
42	0.5	-2.28	$+0.80$	$+2.68$	$+1.80$	1.62
48	0.1	-2.27	$+0.94$	-2.21	-3.07	0.94
100	0.1	-0.30	$+0.60$	$+0.70$	-0.07	0.00
103	1.0	-0.24	$+1.20$	$+0.85$	$+0.15$	0.02
105	0.5	-0.17	$+1.67$	$+2.43$	$+1.79$	1.62
107	1.0	-0.17	$+1.67$	$+0.09$	-0.55	0.30
110	1.0	$+0.25$	-1.18	$+1.76$	$+0.84$	0.71
111	0.5	$+0.25$	-1.18	$+0.24$	-0.68	0.23
113	1.0	$+0.34$	-1.75	$+2.27$	$+1.29$	1.66
114	2.0	$+0.34$	-1.75	$+0.90$	-0.08	0.01
117	2.0	$+0.40$	-1.84	$+0.58$	-0.40	0.32
119	2.0	$+0.43$	-1.78	$+0.76$	-0.21	0.08
121	1.0	$+0.72$	$+0.81$	$+1.68$	$+1.01$	1.02
123	1.0	$+0.72$	$+0.81$	-1.00	-1.67	2.79
						11.99

Normalgleichungen:

$$+14.70\,x + 0.27\,y - 8.08\,\pi + 12.76 = 0$$
$$+10.80\,y - 6.63\,\pi + 0.21 = 0$$
$$+31.85\,\pi - 9.50 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)

$\pi = +0.106$
$y = +0.065$
$x = -0.811$

In Bogensecunden

$\pi = +0''.064 \pm 0''.124$
$y = +0.039 \pm 0.197$

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.60$.

Tafel X.

Bedingungsgleichungen. Paar 13—14.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 2.1000.

Platte	Gewicht					v	pvv
40	1.0	$1.00x$	$-2.33y$	$+1.71\pi$	$+0.56=0$	$+0.58$	0.34
42	0.5		-2.28	$+1.52$	-1.72	-1.72	1.48
48	0.1		-2.27	$+1.44$	$+0.80$	$+0.80$	0.06
100	0.1		-0.30	$+1.53$	$+2.32$	$+2.12$	0.45
103	1.0		-0.24	$+1.23$	$+0.34$	$+0.12$	0.01
105	0.5		-0.17	$+0.54$	-0.02	-0.28	0.04
107	1.0		-0.17	$+0.54$	$+0.44$	$+0.18$	0.03
110	1.0		$+0.25$	-1.26	$+0.02$	-0.38	0.14
111	0.5		$+0.25$	-1.26	$+1.00$	$+0.60$	0.18
113	1.0		$+0.34$	-0.42	-1.34	-1.71	2.92
114	2.0		$+0.34$	-0.42	$+0.56$	$+0.19$	0.07
117	2.0		$+0.40$	$+0.27$	$+0.96$	$+0.62$	0.79
119	2.0		$+0.43$	$+0.56$	$+1.01$	$+0.68$	0.92
121	1.0		$+0.72$	$+1.52$	-0.09	-0.41	0.17
123	1.0		$+0.72$	$+1.52$	-0.60	-0.92	0.85
							8.45

Normalgleichungen:

$$+14.70x + 0.27y + 6.36\pi + 4.33 = 0$$
$$+10.80y - 4.56\pi + 1.45 = 0$$
$$+14.77\pi + 0.80 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)	In Bogensecunden
$\pi = +0.0479$	$\pi = +0''.029 \pm 0''.159$
$y = -0.106$	$y = -0.064 \pm 0.168$
$x = -0.313$	

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.503$.

Beobachtungsgleichungen. Paar 15—16.

Angenommener Wert der Distanzdifferenz 1.0000.

Platte	Gewicht					v	pvv
40	1.0	$1.00x$	$-2.33y$	$+0.84\pi$	$-1.03=0$	-0.65	0.42
42	0.5		-2.28	$+0.40$	-0.03	$+0.31$	0.05
48	0.1		-2.27	$+0.26$	$+1.95$	$+2.27$	0.52
100	0.1		-0.30	$+0.61$	$+0.25$	$+0.76$	0.06
103	1.0		-0.24	-0.04	-0.05	$+0.40$	0.16
105	0.5		-0.17	-0.77	-1.24	-0.86	0.37
107	1.0		-0.17	-0.77	$+0.26$	$+0.64$	0.41
110	1.0		$+0.25$	$+0.01$	-0.31	$+0.18$	0.03
111	0.5		$+0.25$	$+0.01$	$+1.04$	$+1.53$	1.17
113	1.0		$+0.34$	$+0.89$	-2.00	-1.41	1.99
114	2.0		$+0.34$	$+0.89$	-1.06	-0.47	0.44
117	2.0		$+0.40$	$+1.37$	-0.14	$+0.50$	0.50
119	2.0		$+0.43$	$+1.51$	-0.08	$+0.57$	0.65
121	1.0		$+0.72$	$+0.39$	-0.71	-0.15	0.02
123	1.0		$+0.72$	$+0.39$	-1.55	-0.99	0.98
							7.77

Normalgleichungen:

$$+14.70x + 0.27y + 9.17\pi - 7.85 = 0$$
$$+10.80y + 1.56\pi - 1.10 = 0$$
$$+12.70\pi - 5.69 = 0$$

In Scalateilen (2. Decimalstelle)	In Bogensecunden
$\pi = +0.0914$	$\pi = +0''.059 \pm 0''.186$
$y = +0.076$	$y = +0.046 \pm 0.146$
$x = 0.472$	

Mittlerer Fehler einer Gleichung Gewicht 1 $0''.484$.